Correction du devoir maison $n°12$

Partie A : Équivalent de $n!$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln\left(\dfrac{n^n \,\mathbf{e}^{-n}\sqrt{n}}{n!}\right)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \ln\left(\frac{(n+1)^{n+1}\,\mathbf{e}^{-(n+1)}\sqrt{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n\,\mathbf{e}^{-n}\sqrt{n}}\right) \\ &= \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \mathbf{e}^{-1}\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right) \\ &= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

2. On a $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, d'où :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= -1 + 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

   Conclusion : $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$.

3. On a $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$, par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge. Grâce à la dualité suite-série, la suite (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$.

4. La fonction exp étant continue, on a que :

$$\mathbf{e}^{u_n} = \frac{n^n\,\mathbf{e}^{-n}\sqrt{n}}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbf{e}^l$$

   i.e. $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathbf{e}^{-l}\, n^n\,\mathbf{e}^{-n}\sqrt{n}$. On notera par la suite la constante $K = \mathbf{e}^{-l} \in \mathbb{R}_+^*$.

Partie B : Intégrale de Wallis

On définit la suite des intégrales de Wallis $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.

5. *Une relation de récurrence.*
   (a) $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $W_1 = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto \sin^n(t)$ définie sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ est continue et positive, par croissance de l'intégrale, $W_n \geqslant 0$. De plus, par l'absurde, supposons que $W_n = 0$, alors f_n est continue, positive et d'intégrale nulle. Par conséquent, f_n est la fonction nulle ce qui est absurde car $f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Conclusion : (W_n) est une suite de réels strictement positifs.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on va utiliser une intégration par parties à l'aide de fonctions $\mathscr{C}^1$:

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= \Big[-\cos(x)\sin^n(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin^{n-1}(x)\mathrm{d}x \\ &= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(x))\sin^{n-1}(x)\mathrm{d}x = nW_{n-1} - nW_{n+1} \end{aligned}$$

D'où $W_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}W_{n-1}$.

6. *Équivalent.*

(a) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_n = nW_{n-1}W_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = (n+1)W_nW_{n+1} = (n+1)W_n\dfrac{n}{n+1}W_{n-1} = u_n$.
Donc (u_n) est une suite constante à $u_1 = W_0W_1 = \frac{\pi}{2}$. Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $W_{n-1}W_n = \dfrac{\pi}{2n}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \sin^{n+1}(x) \leqslant \sin^n(x)$.
Par croissance de l'intégrale, on obtient $W_{n+1} \leqslant W_n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}$, d'où $\frac{W_{n+1}}{W_{n-1}} \leqslant \frac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1$ i.e. $\frac{n}{n+1} \leqslant \frac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1$.
Conclusion : $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n-1}$.

(c) On a donc $u_n = \frac{\pi}{2} = nW_{n-1}W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} nW_n^2$. D'où $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

7. *Expression explicite des termes pairs et calcul de la constante de Stirling.*

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$W_{2n} = \frac{2n-1}{2n}W_{2n-2} = \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)}W_{2n-4} = ... = \frac{(2n-1)(2n-3)...1}{2n(2n-2)...2}W_0$$

Au numérateur, on reconnaît le produit de tous les nombres impairs entre 1 et $2n-1$.
Au dénominateur, on reconnaît le produit de tous les nombres pairs entre 2 et $2n$.
On multiplie le numérateur et le dénominateur par le produit de tous les nombres pairs entre 2 et $2n$.

$$W_{2n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)...1}{(2n(2n-2)...2)^2}W_0 = \frac{(2n)!}{(2n(2n-2)...2)^2}W_0$$

Or, $(2n(2n-2)...2) = 2^n \times n(n-1)...1 = 2^n \times n!$. Finalement,

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}W_0$$

(b) En utilisant l'équivalent de $n!$ trouvé en amont, on a

$$W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K\,(2n)^{2n}\,\mathbf{e}^{-2n}\sqrt{2n}}{2^{2n}K^2\,n^{2n}\,\mathbf{e}^{-2n}\,n}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{K\sqrt{2n}}$$

(c) Par ailleurs, on a montré que $W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$. On a donc $\frac{\pi}{K\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$ i.e. $K = \sqrt{2\pi}$.

En conclusion,

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\,n^n\,\mathbf{e}^{-n}\sqrt{n}}$$